

Unitatea de învățare : Șiruri de numere Reale

1.5. Criteriul majorării. Criteriul cleștelui. Limite remarcabile

1.5.1. Operații cu șiruri convergente

Teorema (operații cu șiruri convergente): Fie $(x_n)_{n \geq k}$ și $(y_n)_{n \geq k}$ două șiruri convergente. Atunci:

- i) șirul $(x_n + y_n)_{n \geq k}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- ii) șirul $(x_n \cdot y_n)_{n \geq k}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- iii) șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq k}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$;
- iv) pentru $x_n > 0, \forall n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}^*$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$.

Teorema: Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \left(\frac{a_p}{b_q}\right) \cdot (+\infty), & p > q \\ \frac{a_p}{b_q}, & p = q \\ 0, & p < q \end{cases}$$

Exemple: Calculăm limite folosind metoda factorului forțat sau teorema anterioară.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)}{n \left(2 - \frac{3}{n}\right)} = +\infty \text{ sau se folosește teorema anterioară pentru cazul } p > q.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{4 - 2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{4}{n^2} - 2\right)} = -\frac{1}{2} \text{ sau se folosește teorema anterioară pentru cazul } p = q.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^3 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)}{n^3 \left(2 - \frac{3}{n^3}\right)} = 0 \text{ sau se folosește teorema anterioară pentru cazul } p < q.$$

1.5.2. Criteriul majorării

Teorema (criteriul majorării pentru șiruri convergente): Fie $(x_n)_{n \geq k}$ un șir de numere reale. Dacă există un număr $l \in \mathbb{R}$ și un șir de numere reale $(y_n)_{n \geq k}$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ și $|x_n - l| < y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

Teorema (criteriul majorării pentru șiruri cu limita $-\infty$): Fie $(x_n)_{n \geq k}$ un șir de numere reale. Dacă există un șir de numere reale $(y_n)_{n \geq k}$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ și $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Teorema (criteriul majorării pentru șiruri cu limita $+\infty$): Fie $(x_n)_{n \geq k}$ un șir de numere reale. Dacă există un șir de numere reale $(y_n)_{n \geq k}$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ și $x_n \geq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Exemplu: Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $x_n = \sin \frac{1}{n}$ este convergent și are limita 0.

Într-adevăr, folosind criteriul majorării, avem că există numărul $l = 0 \in \mathbb{R}$ și un șir de numere reale $(y_n)_{n \geq 1}$, $y_n = \frac{1}{n}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ pentru care avem $\left| \sin \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Am folosit că

$$|\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ de unde } \left| \sin \frac{1}{n} \right| < \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Din cele de mai sus, folosind criteriul majorării, avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0$.

Teorema: Dacă șirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n \geq k}$ este crescător și nemărginit, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Teorema: Dacă $(x_n)_{n \geq k}$ și $(y_n)_{n \geq k}$ sunt două șiruri de numere reale cu proprietățile:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$

ii) șirul $(y_n)_{n \geq k}$ este mărginit,

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$.

Folosind teoremele anterioare se obține următorul rezultat foarte util:

Teorema: Fie $a \in (-1, \infty)$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (-1, 1) \end{cases}$.

1.5.3. Criteriul cleștelui

Teorema (criteriul cleștelui): Fie $(a_n)_{n \geq k}, (x_n)_{n \geq k}, (b_n)_{n \geq k}$ trei șiruri de numere reale.

Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

$$i) \quad a_n \leq x_n \leq b_n, \quad \forall n \geq k,$$

$$ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l,$$

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

1.5.4. Limite remarcabile

Dacă șirul $(x_n)_{n \geq k}$ este convergent cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, atunci sunt adevărate următoarele egalități.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1.$$

Exerciții rezolvate

1. Demonstrați că limita șirului cu termenul general $x_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$, $n \geq 1$ este 0.

Rezolvare:

Folosim criteriul majorării.

Fie șirul de numere reale $(y_n)_{n \geq 1}$, $y_n = \frac{1}{n+2}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Avem

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+2} - 0 \right| < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Din criteriul majorării avem că } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 0.$$

2. Calculați limitele următoare.

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4}{3^{n+2} + 2}; \quad b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cos \frac{\pi}{4} \right)^n; \quad c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{4}{n^2}.$$

Rezolvare: Avem:

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4}{3^{n+2} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(1 + \frac{4}{3^n} \right)}{3^{n+2} \left(1 + \frac{2}{3^{n+2}} \right)} = \frac{1}{9}, \text{ unde } \frac{4}{3^n} \rightarrow \frac{4}{\infty} = 0 \text{ și } \frac{2}{3^{n+2}} \rightarrow \frac{2}{\infty} = 0.$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cos \frac{\pi}{4} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^{n+1} = +\infty, \text{ unde am folosit că pentru } a > 1 \text{ avem } a^\infty = +\infty.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{4}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\sin \frac{4}{n^2}}{\frac{4}{n^2}}}_{=1} \cdot 4 = 4.$$

3. Calculați limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Rezolvare: Avem $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $k = \overline{1, n}$. De aici avem inegalitățile următoare.

$$k=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$k=2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

...

$$k=n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Adunând inegalitățile de mai sus obținem:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Avem $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, $n \geq 1$ și considerăm șirurile $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$, $n \geq 1$ și $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \geq 1$ pentru care avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|n| \sqrt{\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1 \text{ și}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|n| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Folosind criteriul cleștelui, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.